МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Е.Л. Панкратов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 «Экономическая безопасность» и направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. - 46 с.

Рецензент: доцент кафедры математики и теоретической механики НГСХА к.т.н., доцент **Ю.И. Никитин**

Учебно-методическое пособие «Теория вероятностей и математическая статистика» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 «Экономическая безопасность», и направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия теории вероятностей и математической статистике. Для закрепления теоретических знаний по теории вероятностей и математической статистике в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Прогнозирование экономических процессов приводит к необходимости анализа как детерминированной компоненты данных процессов, так и случайной. Анализ случайной компоненты экономических процессов базируется на аппарате теории вероятностей и математической статистики. В данном пособии приводятся основные понятия теории вероятностей и математической статистики, приводятся примеры решения задач, приводятся задачи для самостоятельного решения. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ПК-2, ПК-3, ПК-4 образовательных стандартов специальностей 08.01.01 «Экономическая безопасность», 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика». В результате изучения раздела математики “Теория вероятностей и математическая статистика ” курса “Математический анализ” студенты должны знать основные понятия комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики; уметь решать задачи, относящиеся к данным разделам математики.

1. ***Комбинаторика***

1.1. Перестановки

Определение 1

Каждая последовательность k различных предметов с учётом порядка называется перестановкой данных предметов.

Если пронумеровать места данных предметов слева направо 1, 2, …, k, то можно сформулировать следующее определение.

Определение **2**

Взаимно однозначное отображение p_k упорядоченного множества $\{1,2,\ldots,k\}$ во множество из k элементов $M=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$ называется перестановкой элементов множества M.

Перестановки из k элементов множества M отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов. Число P_k всех перестановок p_k из k различных элементов равно $k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$.

Пример 1

Рассмотрим множество из 10 элементов. Общее число перестановок в данном случае равно $p_k=10!=3628800$.

Определение 3

Выборка называется упорядоченной, если в ней задан порядок следования элементов. В противном случае выборка называется неупорядоченной.

Из данного определения следует, что две упорядоченные выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, являются различными.

1.2. *Перестановки с повторениями*

Определение 4

Если рассматривать упорядоченные наборы из k элементов, принадлежащих множеству M, в которых некоторые элементы повторяются соответственно l_1, l_2, …, l_q раз, то получаем перестановки с повторениями. Число различных перестановок $C_k(l_1,l_2,\ldots,l_q)$ с повторениями равно

$$C_k\left(l_1,l_2,\ldots,l_q\right)=\frac{k!}{l_1!l_2!\ldots l_q!},\ \sum_{i=1}^{q} l_i=k.$$

Пример 2

Рассмотрим $C_6(3,2,1)$ различных шестизначных чисел, содержащих трижды цифру 1, дважды цифру 2, и один раз цифру 3. Данное число равно $C_6(3,2,\ldots,1)=6!/3!2!1!=60$.

1.3. Размещения

Определение 5

Упорядоченные выборки объёмом m из n элементов ($m < n$), где все элементы различны, называются размещениями. Число размещений из n элементов по m обозначается A_m^n. Данное число может быть вычислено с помощью соотношения $A_m^n=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Пример 3

Группа из 15 человек выиграла 3 различных книги. Определим, сколькими способами можно распределить эти книги среди группы. Для этого воспользуемся соотношением $A_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!}$. Тогда $A_{15}^3 = \dfrac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

1.4. *Размещения с повторениями*

Определение 6

Любой упорядоченный набор *n* элементов, содержащий *r* повторений называется размещением с *r* повторениями. Число различных размещений с повторениями равно $A_r^n = n^r$.

Пример 4

Число различных трёхбуквенных слов, которые можно составить из 33 букв алфавита, равно 33^3=35937.

1.5. *Размещения без повторений*

Имеется *n* различных предметов. Две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или состоят из тех же элементов, но расположенных в разном порядке. Необходимо заметить, что в отличие от случая размещений с повторениями теперь имеется лишь один элемент каждого вида. Необходимо определить количество *k*-расстановок.

С помощью математической индукции можно показать, что количество таких размещений определяется с помощью следующего соотношения:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

1.6. *Сочетания*

Определение 7

Неупорядоченные выборки объёмом *m* из *n* элементов ($m < n$) называются сочетаниями. Их число обозначается C_m^n. Число сочетаний может быть вычислено с помощью соотношения $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 5

Группа из 15 человек выиграла 3 одинаковых книги. Определим, сколькими способами можно распределить эти книги. Для вычисления искомого числа воспользуемся соотношением $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Тогда

$$C_5^3 = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

1.7. *Сочетания без повторений*

Пусть существует комбинация из *n* элементов. В тех случаях, когда представляет интерес не порядок элементов в комбинации, а её состав говорится о сочетаниях. Таким образом, *k*-сочетаниями из *n* элементов называют все возможные *k*-расстановки, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов. Число k-сочетаний, которые можно составить из n элементов, обозначается через C_n^k. Тогда справедливо соотношение:

$$C_n^k=n!/[(n-k)!k!].$$

Следует заметить, что данное соотношение совпадает с соотношением для числа перестановок из k элементов одного типа и n-k элементов второго типа:

$$P(k,n-k)=n!/[(n-k)!k!].$$

<u>Пример 6</u>

В полуфинале некоторых соревнований по шахматам участвуют 20 человек. В финал выходят трое. Число различных исходов полуфинала определяется соотношением:

$$C_{20}^3=20!/(17!3!)= 1140.$$

<u>Пример 7</u>

Необходимо определить количество способов, с помощью которых можно поставить на шахматную доску 8 ладей. В данном случае воспользуемся соотношением:

$$C_{64}^8=64!/(8!56!)=4\ 328\ 284\ 968.$$

Аналогично доказывается, что на доске из m горизонталей и n вертикалей k ладей можно поставить

$$C_{mn}^k=(mn)!/[(mn-k)!k!]$$

способами.

1.8. *Сочетания с повторениями*

Пусть имеется k элементов одного типа и n элементов другого типа. С помощью перестановок можно образовать несколько комбинаций предметов обоих типов. Тогда число $\tilde{C}_{n+1}^k$ сочетаний k сочетаний из элементов n+1 типов равно числу $P(k,n)$ перестановок с повторениями из k элементов одного типа и n элементов другого типа. С другой стороны $P(k,n)=(k+n)!/(k!n!)$. По этой причине

$$\tilde{C}_{n+1}^k=\frac{(k+n)!}{k!n!}=C_{n+k}^k.$$

Свойства сочетаний

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$; 2) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$; 3) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

<u>Определение 8</u>

Объединим все размещения с повторениями из n элементов по m, состоящие из одинакового количества одних и тех же элементов (без учёта расположения), в классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности называется сочетанием из n элементов по m. Число различных сочетаний с повторениями равно

$$C_{m+n-1}^{n-1}=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример 8

Из пяти элементов A, B, C, D, E можно образовать $C^3_{5+3-1} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ неупорядоченных выборок по три элемента с повторениями: (A,A,A), (A,A,B), (A,A,C), …, (A,C,D), …, (E,E,E).

Правило сложения

Определение 9

Правило сложения (правило "или") - одно из основных правил комбинаторики, утверждающее, что, если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A или B можно $n+m$ способами.

Пример 9

Выбрать книгу или диск из 10 книг и 12 дисков можно 10+12=22 способами.

Правило умножения (правило "и")

Определение 10

Согласно правилу умножения, если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару (A,B) можно выбрать n·m способами. Естественным образом обобщается на произвольное количество независимо выбираемых элементов.

Пример 10

Выбрать книгу *и* диск из 10 книг и 12 дисков можно 10·12=120 способами.

1.9. Бином Ньютона

Бином Ньютона - формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n,$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальные коэффициенты, n - неотрицательное целое число.

Обобщения бинома Ньютона

Формула бинома Ньютона является частным случаем разложения функции $(1+x)^r$ в ряд Тейлора:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k,$$

где r может быть комплексным числом (в частности, отрицательным или вещественным). Коэффициенты этого разложения находятся по формуле:

$$\binom{r}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{n=0}^{k-1} (r-n) = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-(k-1))}{k!}$$

При этом ряд

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots$$

сходится при $|z|\le 1$. В частности, при $z=1/m$ и $\alpha=x\cdot m$ получается тождество

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{xm}=1+x+\frac{xm(xm-1)}{2m^2}+\ldots+\frac{xm(xm-1)\ldots(xm-n+1)}{n!m^n}+\ldots$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$ и используя второй замечательный предел $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$, получаем тождество

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

которое именно таким образом было впервые получено Эйлером.

1.10. *Мультиномиальная теорема*

Бином Ньютона может быть обобщен до полинома Ньютона — возведения в степень суммы произвольного числа слагаемых:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{k_j\ge 0,k_1+k_2+\ldots+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m},$$

где $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$ - мультиномиальные коэффициенты. Сумма берется по всем неотрицательным целым индексам k_j, сумма которых равна n (то есть по всем композициям числа n длины m). При использовании полинома Ньютона считается, что выражения $x_j^0=1$, даже если $x_j=0$.

Мультиномиальная теорема легко доказывается либо по индукции по m, либо из комбинаторных соображений и комбинаторного смысла мультиномиального коэффициента. При $m=2$, выражая $k_2=n-k_1$, получаем бином Ньютона.

2. *Случайные величины*

2.1. *Введение*

<u>Определение 11</u>

Случайный эксперимент (опыт) - процесс, при котором возможны различные исходы, так что заранее нельзя предсказать, каков будет результат.

<u>Определение 12</u>

Возможные исключающие друг друга исходы опыта называются элементарными (случайными) событиями.

<u>Определение 13</u>

Возможные исключающие друг друга исходы опыта называются элементарными (случайными) событиями.

Определение 14
Возможные исключающие друг друга исходы опыта называются элементарными (случайными) событиями.
Определение 15
События A_1 и A_2 называются несовместными, если они не могут произойти одновременно. В таком случае они обозначаются следующим образом:
$A_1 \cap A_2 = V$.
Пример 11
При бросании игральной кости выпадает только одно количество очков (от 1 до 6, т.е. выпадает только одна сторона игральной кости).
Определение 16
События A_1 и A_2 называются совместными, если они могут произойти одновременно.
Пример 12
При бросании игральной кости может выпасть одновременно 4 очка и чётное количество очков.
Определение 17
Если A - некоторое событие, то дополнение $\overline{A} = E \setminus A$ также является подмножеством E, т.е. некоторым событием. $\overline{A}$ происходит тогда, когда не происходит A и называется событием, противоположным (дополнительным) к A, т.е. события A и $\overline{A}$ всегда несовместны ($A \cap \overline{A} = V$).
Определение 18
Пусть A_1, A_2, …, A_n - события, т.е. подмножества некоторого фиксированного множества E элементарных событий. Тогда объединение $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ также можно считать событием, т.к. оно является подмножеством множества E. Объединение происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A_1, A_2, …, A_n. Событие $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ называется суммой событий. Данная сумма часто обозначается $A_1+A_2+\ldots+A_n$.
Определение 19
Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого. В противоположном случае события называются зависимыми.
Пример 13
Монета брошена два раза. Вероятности появления и непоявления герба в обоих испытаниях независимы друг от друга.
Пример 14
В урне находится 3 белых и 5 чёрных шаров. Из урны вынимается один из шаров. Вероятность изъятия из урны белого шара равна 3/8, чёрного - 5/8. После изъятия из урны одного из шаров вероятность появления белого и чёрного шаров при новом опыте изменяется.

Определение 20

Пусть опыт повторяется n раз. При этом возможны n несовместных равновозможных исходов. При этом интересующее нас событие A произошло m раз. Отношение

$$P_n(A)=m/n$$

называется (относительной) частотой случайного события A в n опытах. При этом $0\le P_n(A)\le 1$.

Частота события обладает следующими свойствами:

1) с ростом значения n уменьшаются колебания частоты $P_n(A)$ в окрестности некоторого значения;
2) $P_n(U)=1$;
3) $P_n(A_1\cup A_2)=P_n(A_1)+P_n(A_2)$, если A_1 и A_2 несовместны.

Определение 21

Предел

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P_n(A)$$

называется вероятностью случайного события A. Такое определение вероятности называется классическим.

Пример 15

Рассмотрим бросание двух игральных костей. Если кости правильные, то выпадание каждой из 36 возможных комбинаций числа очков на первой или второй кости можно считать равновероятными. Например, вероятность выподания в сумме 12 очков равна 1/36. Выпадание в сумме 11 очков возможно двумя способами: на первой кости 5 очков, на второй – 6 очков; на первой кости 6 очков, на второй – 5 очков. По этой причине вероятность выпадания в сумме 11 очков равна 2/36=1/18. Вероятность выпадания некоторой суммы очков определяется следующей таблицей.

Число очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Рассмотрим другой способ определения вероятности. Известно, что длительные наблюдения над появлением или непоявлением события A при большом числе независимых испытаний, производимых при одном и том же комплексе условий B, в ряде случаев показывают, что число появлений события A подчиняется устойчивым закономерностям. В качестве закономерности можно указать, что если через m обозначить число появлений события A при n независимых испытаниях, то отношение m/n (частота события A) при больших n для большинства таких серий наблюдений сохраняет почти постоянную величину. Причём большие отклонения наблюдаются тем реже, чем многочисленнее произведённые испытания. В таких случаях можно считать, что событие имеет вероятность, примерно равную частоте события A.

Определение 22

Рассмотренное определение вероятности называется статистическим.

Однако данные испытания могут привести и к другому результату. Рассмотрим ситуацию, когда событие A имеет вероятность P, но при проведении серии независимых испытаний оказалось, что частоты в подавляющем числе серий независимых испытаний вероятность события A значительно отличается от P. Это обстоятельство ставит под сомнение исходные априорные предпосылки испытаний. Например, в отношении некоторой игральной кости сделано предположение о её геометрической правильности и однородности материала, из котророго она изготовлена. Из этих предпосылок можно сделать вывод, что при бросании кости выпадание грани с номером, например, 5 должна быть равна 1/6. Если неоднократные серии многочисленных испытаний (бросаний) в нашем примере показывают, что частота появления этой грани значитеотно отличается от 1/6, то это приводит к сомнениям не в существовании определённой вероятности выпадания этой грани, а в исходных предпосылках о правильности кости или в правильности организации процесса испытаний (бросаний).

Следует заметить, что в случае статистического определения вероятности также имеют место следующие свойства вероятности:

1) вероятность достоверного события равна единице;
2) вероятность невозможного события равна нулю;
3) если случайное событие A является суммой конечного числа несовместных событий (A=A_1+ A_2), то его вероятность равна сумме вероятностей слагаемых $P(A)$=$P(A_1)$+$P(A_2)$.

2.2. Геометрические вероятности

В данном разделе рассмотрим некоторые геометрические приложения теории вероятностей. В данном случае классическое определение вероятности не применимо. Более общая задача, которая привела к обобщению понятия вероятности, может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется, например, на плоскости, некоторая область G. В данной области содержится другая область g. В область G наудачу бросается точка. Необходимо определить вероятность попадания точки в область g. При этом вероятность попадания точки в какую-то часть области G пропорциональна мере этой части (длине, площади, …) и не зависит от её расположения и формы. Таким образом, вероятность попадания в область g при бросании точки со случайными координатами в область G определяется следующим соотношением:

$$P=mes(g)/mes(G).$$

Пример 16

Два лица A_1 и A_2 планировали встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждёт второго в течении 20 минут и уходит. Необходимо определить вероятность встречи лиц A_1 и A_2, если приход каждого из них в течении данного часа случаен и моменты прихода независимы (т.е. момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого лица).

Решение: Обозначим моменты прихода лица A_1 через x_1, а лица A_2 через x_2. Для того, чтобы их встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x_1-x_2|\leq 20$. Изобразим x_1 и x_2 как декартовы координаты на плоскости. При этом в качестве единицы масштаба выберем минуту. Возможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60. Благоприятствующие встрече расположатся в заштрихованной области (см. рис.1).

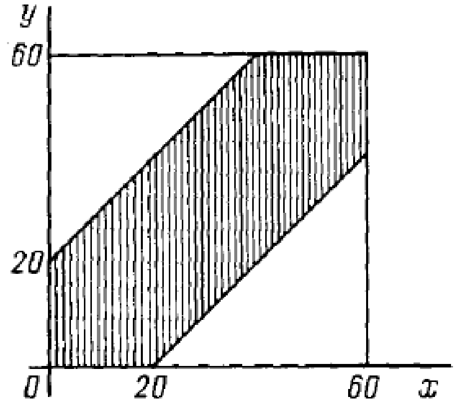


Рис. 1

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области фигуры к площади квадрата: $P=(60^2-40^2)/60^2=5/9$.

Пример 17

Коэффициенты p и q квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

выбираются случайными в промежутке (0,1). Необходимо определить вероятность того, что корни являются действительными числами.

Чтобы корни квадратного уравнения были действительными числами, необходимо и достаточно выполнение неравенства $p^2\geq 4q$. В декартовых координатах (рис. 2) все возможные пары чисел (p,q) задаются точками квадрата с вершинами (0,0), (0,1), (1,1) и (1,0). Точки, благоприятствующие анализируемому событию, расположены под параболой $q=p^2/4$. Таким образом, искомая вероятность определяется соотношением:

$$\int_0^1 \frac{p^2}{4}\,dp \Big/ 1=\frac{1}{12}.$$

Пример 18 (парадокс Бертрана)

Случайным образом берётся хорда в круге. Необходимо определить вероятность того, что её длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника.

Решение 1: Из соображений симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведём диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Очевидно, что только хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трёх четвертей его длины, будут превосходить стороны правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна 1/2.

Решение 2: Из соображений симметрии можно заранее закрепит один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 60°. Условию задачи благоприятствуют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, при этом способе вычисления искомая вероятность оказывается равной 1/3.

Решение 3: Чтобы определить положение хорды достаточно задать её середину. Чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы её середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна одной четверти площади данного. Таким образом, искомая вероятность равна 1/4.

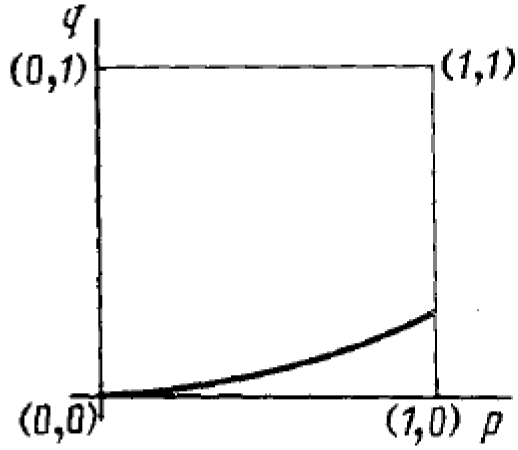
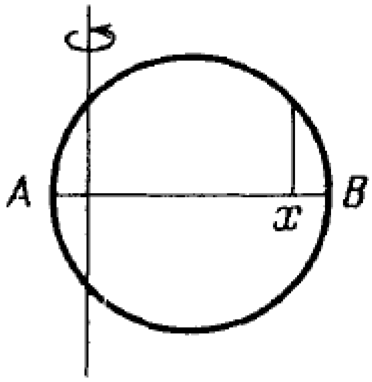


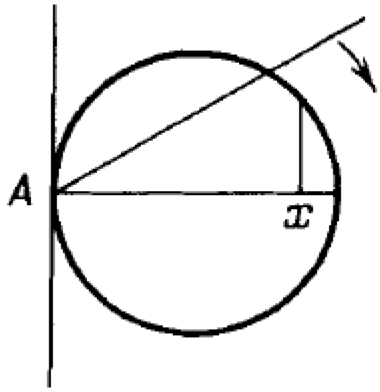
Рис. 2

Причиной неоднозначности решения является неопределённость понятия “проведение хорды на удачу”. По этой причине за решение одной задачи выдаётся решение трёх различных задач. В первом решении вдоль одного из диаметров катится круглый цилиндрический стержень (рис.3). Множеством всех возможных мест остановки этого стержня является множество точек отрезка AB длины, равной диаметру. Равновероятными считаются события, состоящие в том, что остановка произойдёт на интервале длины h, где бы внутри диаметра ни был бы расположен этот отрезок. Во втором решении стержень, закреплённый на шарнире, расположенном в одном из точек окружности, заставляют совершать колебания размером не более 180° (рис.4). При этом предполагается, что остановка стержня внутри дуги окружности h, зависит только от длины дуги, не от её положения. Таким образом, равновероятными событиями считаются остановки стержня в любых дугах окружности одинаковой длины. Несогласованность определений вероятности в первом и втором решениях становится очевидной после следующего расчёта. Вероятность того, что стержень остановится в промежутке от A до x, согласно первому решению равна x/D (D - диаметр). Вероятность того, что проекция точки пересечения стержня с окружностью во втором решении попадает в тот же интервал и, как показывают геометрические расчёты, равна

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{2x-D}{D}\right), & x \geq \dfrac{D}{2} \\ \dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\dfrac{2x-D}{D}\right), & x \leq \dfrac{D}{2} \end{cases}.$$

В третьем решении бросается наудачу точка внутрь круга. Далее определяется вероятность попадания внутрь некоторого меньшего концентрического круга (рис.5). Таким образом, различие постановок задач во всех трёх случаях сомнений не вызывает.





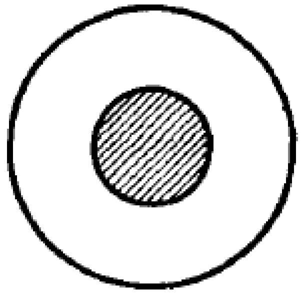


Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

Пример 19 (задача Бюффона)

Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу (центр иглы падает на отрезок длины $2a$, перпендикулярный к проведённым прямым; вероятность того, что угол φ, составленный иглой и проведёнными прямыми, будет заключаться между φ и $\varphi + \Delta\varphi$ пропорциональна $\Delta\varphi$; величины координаты x и угла φ независимы) бросается игла длины $2l$ ($l<a$). Найдём вероятность того, что игла пересечёт какую-нибудь прямую.

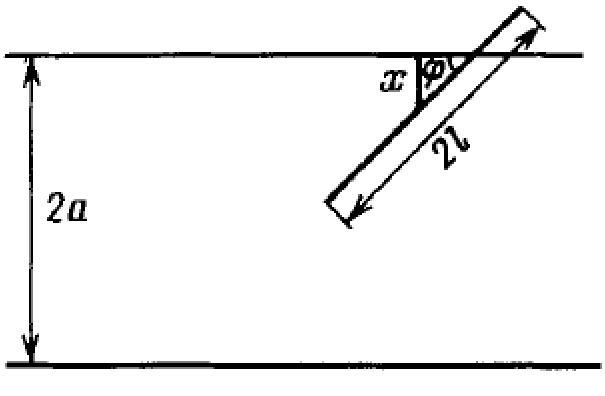


Рис. 6

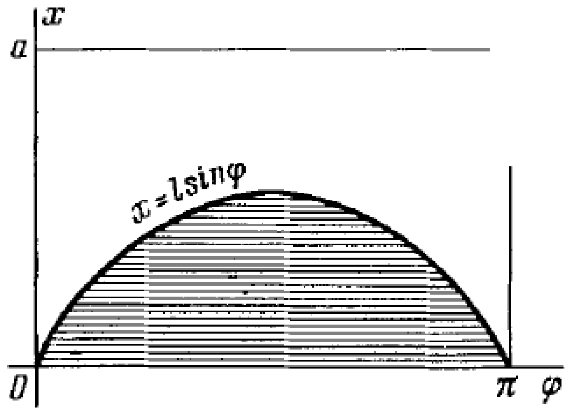


Рис. 7

Решение: Обозначим через x расстояние от центра до ближайшей параллели и через φ - угол, составленный иглой с этой параллелью. Величины x и φ полностью определяют положение иглы. Возможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами a и π. Из рис. 6 следует, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы $x \leq l \sin(\varphi)$. Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению заштрихованной на рис. 7 области к площади прямоугольника.

2.3. Теорема сложения для несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих двух событий:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

Пример 20

Пусть при определении длительности жизни событием A_1 является событие "продолжительность жизни лежит между 0 и t_1". Событием A_2 является событие "продолжительность жизни лежит между t_1 и t_2". Тогда объединением событий A_1+A_2 является следующий результат: "продолжительность жизни лежит между 0 и t_2".

Определение 23

Рассмотрим два зависимых события A_1 и A_2. Условной вероятностью $P(A_2/A_1)$ называется вероятность события A_2 при условии, что событие A_1 произошло.

2.4. Теорема сложения для совместных событий

Вероятность появления одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих двух событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

Следует заметить, что

1) для независимых событий A и B выполняется:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2),$$

для зависимых событий A и B выполняется:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2/A_1);$$

2) если события A и B несовместны, то:

$$P(A_1A_2)=0 \Rightarrow P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

Определение 24

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – события, т.к. подмножества некоторого фиксированного множества E элементарных событий. Тогда пересечение $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ также можно считать событием, т.к. оно является подмножеством множества E. Объединение происходит тогда, когда происходят одновременно все события $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Событие $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ называется произведением событий. Данное произведение часто обозначается $A_1A_2\ldots A_n$.

Пример 21

Если при одновременном бросании костей событием A_1 является событие "сумма очков не меньше 11". Событием A_2 является событие "выпадает одинаковое количество очков". Тогда пересечением событий является следующий результат: "выпадает две шестёрки".

2.5. Теорем умножения для независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A_1 и A_2 равна произведению вероятностей этих двух событий, т.е.:

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2).$$

2.6. Теорема умножения для совместных событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A_1 и A_2 равна произведению вероятностей этих двух событий, т.е.:

$$P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1).$$

Следствие

Вероятность совместного появления нескольких (более двух) событий может быть представлена в следующем виде:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}).$$

2.7. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий B_1, B_2, ..., B_n, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A/B_n).$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, вероятности появления которых $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$. Событие А может произойти только вместе с каким-либо из событий B_1, B_2, ..., B_n, которые будем называть гипотезами. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A/B_n).$$

Если событие А произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$. По теореме умножения вероятностей

$$P(A\cdot B_1)=P(B_1)\cdot P(A/B_1).$$

Отсюда

$$P(B_1/A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)/P(A).$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)/P(A),\ i=1,\ ...,\ n.$$

Полученная формула называется формулой Байеса. Вероятности гипотез $P(B_i/A)$ называются апостериорными вероятностями, тогда как $P(B_i)$ - априорными вероятностями.

2.8. Действия над случайными событиями

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1,\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1 \text{ (коммутативность)}$$

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3),\ (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \text{ (ассоциативность)}$$

$\left(A_1 \cup A_2\right) \cap A_3 = A_1 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3$, $\left(A_1 \cap A_2\right) \cup A_3 = \left(A_1 \cup A_3\right) \cap \left(A_2 \cup A_3\right)$ (дистрибутивность)

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (формулы де Моргана).

2.9. Повторные независимые испытания

Определение 25

Последовательность независимых испытаний, каждое из которых имеет один и тот же набор возможных исходов E и их вероятностей $P\{E\}$ называется повторными независимыми испытаниями. Вероятность получения определённой последовательности результатов A_1, A_2, …, A_n при проведении n повторных независимых испытаний определяется следующим соотношением:

$$P(A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

2.10. Теорема (формула) Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью P появляется событие A. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления событие A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности P по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико. Т.е. в данной ситуации, если ε - сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы выполняется равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|m/n - P\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

2.11. Локальная теорема Лапласа

Если вероятность P появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближённо равна (тем точнее, чем точнее n) значению следующей функции:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n Q P}} \exp\left[-\frac{(k-nP)^2}{2nQP}\right],$$

где Q=1-P.

Пример 22

Найти вероятность того, что событие A наступит 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,2.

Решение: В данном случае Q=0,8. Далее воспользуемся рассмотренной в предыдущей теореме асимптотической формулой Лапласа. Тогда:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} \exp\left[-\frac{(80-400\cdot 0{,}2)^2}{2\cdot 400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}\right] = \frac{1}{\sqrt{128\pi}} \approx 0{,}04987.$$

Пример 23

Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна P=0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.
Решение: В данном случае P=0,75; Q=0,25; n=10; k=8. Далее воспользуемся рассмотренной в предыдущей теореме асимптотической формулой Лапласа. Тогда:

$$P_{10}(8)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\exp\left[-\frac{(8-10\cdot 0{,}75)^2}{2\cdot 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}\right]=0{,}27256\,.$$

2.12. Интегральная теорема (формула) Лапласа

Если вероятность P наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз приближённо равна следующему интегралу:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(k_1-np)/\sqrt{npq}}^{(k_2-np)/\sqrt{npq}} e^{-z^2/2}d\,z\,.$$

<u>Пример 24</u>

Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна P=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

<u>Решение:</u> В данном случае P=0,2; Q=0,8; n=400; k_1=70; k_2=100. Далее воспользуемся интегральной теоремой Лапласа. Тогда:

$$P_{400}(70{,}100)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(70-400\cdot 0{,}2)/\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}^{(100-400\cdot 0{,}2)/\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} e^{-z^2/2}d\,z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1{,}25}^{2{,}5} e^{-z^2/2}d\,z\approx 2{,}22624\,.$$

2.13. Формула (теорема, закон) Пуассона

Рассмотрим последовательность серий:

$$\begin{array}{c} A_{11} \\ A_{21},\, A_{22} \\ A_{31},\, A_{32},\, A_{33} \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ A_{n1},\, A_{n2},\, A_{n3},\, \dots,\, A_{nn} \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \end{array}$$

Пусть события данной серии взаимно независимы между собой и имеют каждой вероятность P_n, зависящую только от номера серии. Пусть μ_n – число фактически появившихся событий n-ой серии. Если $P_n\to 0$ и $n\to\infty$, то

$$P(\mu_n=m)=\frac{(n\cdot p_n)^m}{m!}e^{-n\cdot p_n}\ \to 0\,.$$

<u>Определение 26</u>

Действительная величина, которая в зависимости от исхода опыта принимает случайное значение, называется случайной величиной.

Определение 27

Дискретной (прерывной) случайной величиной является случайная величина, принимающая отдельные (изолированные) значения с определёнными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Определение 28

Непрерывной случайной величиной является случайная величина, принимающая любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины может быть бесконечным.

Необходимо заметить, что случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их - различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные её значения. Необходимо также указать их вероятности.

2.14. Дискретные случайные величины

2.14.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение 29

Законом распределения (распределением) дискретной случайной величины называется соответствие между её возможными значениями и их вероятностями. Распределение случайной величины может быть задано таблично, аналитически (формулой) и графически.

Пример 25

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Тогда может быть рассмотрена таблица соответствий:

X	X_1	X_2	…	X_n
P	P_1	P_2	…	P_n

Математические операции над дискретными случайными величинами

Над дискретными случайными величинами возможны сложение и умножение по аналогии со сложением и умножением случайных событий.

2.14.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, часто закон распределения неизвестен. По этой причине приходится использовать меньшее количество информации. Иногда оказывается удобным использовать числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называются числовыми характеристиками случайной величины.

Моменты дискретной случайной величины

Определение 21

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с вероятностями $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Моментом N-го порядка дискретной величины X называется следующая характеристика:

$$\mu_N = \sum_{k=1}^{n} X_k^N P_k .$$

Пример 20

Одним из наиболее часто анализируемых моментов дискретной величины A является момент первого порядка. Он называется средним значением (это название однозначно характеризует смысл данного момента) или математическим ожиданием и определяется следующим образом:

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{n} X_k P_k .$$

Пример 21

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины со следующим распределением:

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Решение: Искомое математическое ожидание определяется с помощью следующего соотношения:

$$\mu_1=X_1P_1+X_2P_2+X_3P_3=3\cdot0,1+5\cdot0,6+2\cdot0,3=0,3+3+0,6=3,9.$$

Пример 22

Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна P.

Решение: Случайная величина X - число появлений события A в одном испытании - может принимать только два значения: X_1=1 (событие A наступило) с вероятностью P_1=P и X_2=0 (событие A не наступило) с вероятностью P_2=1-P. Искомое математическое ожидание определяется с помощью следующего соотношения:

$$\mu_1=X_1P_1+X_2P_2=1\cdot P+0\cdot(1-P)=P.$$

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной величины равно постоянной величине;
2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания;
3) математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий;
4) математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий;
5) математическое ожидание числа появлений событий A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании, т.е. $\mu_1=nP$.

Пример 23

Вероятность попадания в цель при стрельбе равна P=0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий в цель после 10 выстрелов.

Решение: Воспользуемся соотношением из последнего свойства. Тогда μ_1=10·0,6=6.

Центрированные моменты дискретной случайной величины

Определение 21

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения X_1, X_2, …, X_n с вероятностями P_1, P_2, …, P_n. Моментом N-го порядка дискретной величины A называется следующая характеристика:

$$\eta_N = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mu_1\right)^N P_k .$$

Пример 23

Центрированный момент первого порядка тождественно равен нулю. Одним из наиболее часто анализируемых центрируемых моментов дискретной величины A является момент второго порядка. Он называется дисперсией, характеризует разброс значений случайной величины и определяется следующим образом:

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mu_1\right)^2 P_k .$$

Пример 24

Найти дисперсию дискретной случайной величины со следующим распределением:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

Решение: Найдём среднее значение рассмотренной данной случайной величины. Согласно рассмотренному ранее соотношению математической ожидание равно следующему значению:

$$\mu_1=X_1P_1+X_2P_2+X_3P_3=1\cdot0,3+2\cdot0,5+5\cdot0,2=0,3+1+1=2,3.$$

Подстановка данного результата в соотношение для дисперсии позволяет получить:

$$\eta_2=(X_1-\mu_1)^2P_1+(X_2-\mu_1)^2P_2+(X_3-\mu_1)^2P_3=(1-2,3)^2 0,3+(2-2,3)^2 0,5+$$
$$+(5-2,3)^2 0,2=1,69\cdot0,3+0,09\cdot0,5+7,29\cdot0,2=2,01.$$

Рассмотренное ранее соотношение для дисперсии может быть преобразовано к следующему соотношению:

$$\eta_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mu_1\right)^2 P_k = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^2 - 2\mu_1 X_k + \mu_1^2\right) P_k = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 P_k - 2\mu_1 \sum_{k=1}^{n} X_k P_k + \mu_1^2 \sum_{k=1}^{n} P_k .$$

Сумма во втором слагаемом в правой части полученного соотношения равна математическому ожиданию случайной величины. Сумма в третьем слагаемом в правой части полученного соотношения равна единице. Тогда можно получить следующее соотношение, позволяющее вычислять дисперсию как комбинацию моментов:

$$\eta_2=\mu_2-2\mu_1^2+\mu_1^2=\mu_2-\mu_1^2.$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю;
2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат;
3) дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин;
4) дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин;
5) дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность P появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления Q=1-P события в одном испытании, т.е. $\eta_2=n\cdot P\cdot Q$.

Среднее квадратическое отклонение

Определение 22

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется следующая характеристика:

$$\sigma = \sqrt{\eta_2} .$$

Далее рассмотрим непрерывные случайные величины и их характеристики. Необходимо заметить, что дискретная случайная величина задаётся перечнем её значений и их вероятностей. Такой подход не применим к непрерывным случайным величинам. По этой причине необходимо введение более общих характеристик.

2.15. Непрерывные случайной величины

2.15.1. Функции распределения случайной величины

Интегральная функция распределения

Определение 23

Функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшие x, называется (интегральной) функцией распределения.

Теперь сформулируем более точное определение непрерывной случайной величины.

Определение 24

Непрерывной случайной величиной является случайная величина, интегральная функция распределения $F(x)$ которой непрерывно дифференцируема.

Свойства интегральной функции распределения

1) Значения интегральной функции распределения принадлежат отрезку $0 \le F(x) \le 1$;
2) $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Следствия свойства 1

1) Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале

$x \in [x_1, x_2]$, равна приращению интегральной функции на данном интервале:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1);$$

2) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет определённое значение x, равна нулю.
3) Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $x \in [x_1, x_2]$, то $F(x)=0$ при $x \le x_1$ и $F(x_2)=0$ при $x \ge x_2$.

Следствие свойства 2

Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то выполняются следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Пример 25

Необходимо найти интегральную функцию распределения дискретной случайной величины X, которая задана следующей таблицей:

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Решение: Если $x \le 1$, то $F(x)$ =0 (третье свойство). Если $1 < x \le 4$, то $F(x)=0{,}3$. Если $4 < x \le 8$, то $F(x)=0{,}4$ (сложились вероятности двух несовместных величин). Если $x > 8$, то $F(x)=1$.

Дифференциальная функция распределения (*плотность вероятности*)

Определение 25

Функция $f(x)$, определяемая соотношением:

$$f(x) = F'(x),$$

называется дифференциальной функцией распределения (плотностью вероятности) случайной величины X. Данная функция распределения фактически является отношением вероятности попадания случайной величины X в интервал $x \in [x, x+dx]$ к величине интервала dx в пределе $dx \to 0$.

Интегральная функция распределения может быть определена по известной дифференциальной следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du .$$

Свойства дифференциальной функции распределения

1) Дифференциальная функция распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \ge 0$;
2) выполняется условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (если интервал, в который попадает случайная величина, ограничена, т.е. $x \in [x_1, x_2]$, то $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 1$).

Примеры функций распределения

Пример 26

Случайная величина называется равномерно распределённой, если её плотность вероятности постоянна в некотором интервале $x \in [x_1, x_2]$ и равна нулю вне его, т. е. $f(x)=1/(x_2-x_1)$.

Пример 27

Плотность вероятности:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\eta_2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\eta_2}\right]$$

называется нормальным (гауссовым) распределением.

Пример 28

Случайная величина распределена по показательному закону, если её плотность вероятности имеет следующий вид:

$$f(x)=\begin{cases} b\cdot\ln(a)\cdot a^{-b\,x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Функция надежности (доверительная вероятность)

Рассмотрим в качестве элемента некоторое устройство. Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_0=0$, а по истечении времени t=T происходит отказ. Интегральная функция распределения

$$F(t)=P(T<t)$$

определяет вероятность отказа за время длительностью t. Вероятность безотказной работы за это же время длительностью t, т.е. вероятность противоположного события $T>t$, равна

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t).$$

Функцией надёжности (доверительной вероятностью) называют функцию $R(t)$, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t.

2.15.2. Числовые характеристики непрерывной случайных величин

Определение 26

Пусть непрерывная случайная величина X описывается дифференциальной функцией распределения $f(x)$. Тогда момент N-го порядка непрерывной случайной величины X называется следующая характеристика:

$$\mu_N=\int_{-\infty}^{\infty}x^N f(x)\,dx.$$

Свойства моментов непрерывной случайной величины аналогичны свойствам моментов дискретной случайной величины.

Определение 27

Пусть непрерывная случайная величина X описывается дифференциальной функцией распределения $f(x)$. Тогда центрированный момент N-го порядка непрерывной случайной величины X называется следующая характеристика:

$$\eta_N = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1)^N f(x) d\,x .$$

Свойства центрированных моментов непрерывной случайной величины аналогичны свойствам моментов дискретной случайной величины.

Определение 28

Фурье-образ от плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X называется характеристической функцией:

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} d\,x .$$

Свойства характеристической функции

1) Характеристическая функция равномерна и непрерывна на всей действительной оси;
2) для любой характеристической функции выполняются соотношения: $\Theta(0)=1$, $|\Theta(\omega)|\le 1$.

Определение 29

Разложим натуральный логарифм характеристической функции в ряд Маклорена:

$$\ln[\Theta(\omega)] = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k \frac{(j\omega)^k}{k!} .$$

Коэффициенты разложения ϑ_k называются кумулянтами (семиинвариантами) случайной величины X.

Следует заметить, что могут быть получены соотношения, связывающие кумулянты k-го порядка с моментами k-го и более младших порядков, а также соотношения, связывающие моменты k-го порядка с кумулянтами k-го и более младших порядков. Например, $\vartheta_1=\mu_1$; $\vartheta_2=\eta_2$.

Определение 30

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Они называются коррелироваными, если отличен от нуля совместный момент первого порядка $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \times$ $\times\, y f(x,y) d\,y\, d\,x$, где $f(x,y)$ - совместная плотность вероятности случайных величин X и Y. Большинство свойств совместной плотности вероятности аналогичны свойствам плотности вероятности одной случайной величины. Дополнительные свойства следующие:

1) $f(x,y)=f(x)\cdot f(y/x)$;
2) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) d\,y$.

Следует заметить, что из статистической независимости двух случайных величин следует их некоррелированность. Обратное утверждение почти никогда не выполняется.

Определение 31

Рассмотрим две случайных величины X и Y. Величина

$$G_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sqrt{\mu_{2x}\mu_{2y}}},$$

где μ_{2x} и μ_{2y} – собственные дисперсии случайных величин X и Y, соответственно, называется коэффициентом корреляции.

2.15.2. Правило трёх сигм

Стандартное отклонение (*среднеквадратичное отклонение*)

Среднеквадратичное отклонение - в теории вероятности и статистике наиболее распространенный показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания. Измеряется в единицах измерения самой случайной величины. Равен корню квадратному из дисперсии случайной величины. Стандартное отклонение используют при расчёте стандартной ошибки среднего арифметического, при построении доверительных интервалов, при статистической проверке гипотез, при измерении линейной взаимосвязи между случайными величинами

$$s = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

где s - стандарт, стандартное отклонение, несмещенная оценка среднеквадратического отклонения случайной величины X относительно её математического ожидания; σ^2 - дисперсия; x_i - i-й элемент выборки; $\bar{x}$ - среднее арифметическое выборки; n - объём выборки.

Следует отметить отличие стандарта (в знаменателе $n-1$) от корня из дисперсии (среднеквадратического отклонения: в знаменателе n), при малом объёме выборки оценка дисперсии через последнюю величину является несколько смещенной, при бесконечно большом объёме выборки разница между указанными величинами исчезает. Выборка - лишь часть генеральной совокупности. Генеральная совокупность - абсолютно все возможные результаты. Получить результат, не входящий в генеральную совокупность абсолютно невозможно в принципе. Для случая с бросанием монетки генеральной совокупностью является: решка, ребро, орел, а вот пара орел-решка уже лишь выборка. Для генеральной совокупности математическое ожидание совпадает с истинным значением оцениваемого параметра. А вот для выборки не всегда. Математическое ожидание выборки имеет смещение относительно истинного значения параметра. В силу этого, среднеквадратичная ошибка больше чем дисперсия, так как дисперсия - математическое ожидание квадрата отклонения от среднего значения, а среднеквадратичное отклонение - математическое ожидание отклонения от истинного значения. Разница в том, от чего ищем отклонение, когда дисперсия, то от среднего и не важно истинное это среднее или ошибочное, а когда среднеквадратичное отклонение, то ищем отклонение от истинного значения.

3. Математическая статистика

Задачи математической статистики заключаются в том, что на основании знаний некоторых свойств подмножества элементов, взятых из некоторого множества, сделать какие-нибудь утверждения о свойствах этого множества, называемого генеральной совокупностью. В генеральной совокупности обычно интересует некоторый признак, который является следствием случайности, и может иметь качественный или количественный характер.

Пример 29

Пусть было произведено некоторое количество ламп накаливания. Их мощность - количественный признак, а длительность работы - качественный.

Основной целью математической статистики является разработка методов статистического наблюдения и анализа статистических данных.

3.1. Некоторые методы математической статистика

Классический метод определения неизвестных параметров функции распределения случайной величины X заключается в том, что до наблюдения подлежащие оценке величины считаются случайными величинами, подчинёнными “априорному” (доопытному) закону распределения вероятностей. Предполагая этот априорный закон распределения известным, используя формулу Байеса можно вычислить “апостериорный” (послеопытный) закон распределения параметров при условии, что результаты наблюдений над X оказались равными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Всё последующее изложение будет относится к определению параметров μ_1 и η_2 нормального закона распределения

$$f\left(x \mid \mu_1, \eta_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2}} \exp\left[-\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{2\eta_2}\right],$$

которому подчинена случайная величина X. Плотность вероятности того, что в результате n независимых наблюдений величины X будут получены значения x_1, $x_2, \ldots, x_n$ при условии, что неизвестные моменты имеют значения μ_1 и η_2, равна:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_2}} \exp\left[-\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{2\eta_2}\right],$$

где $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\mu_1\right)^2$. Если ввести обозначения $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, $s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{x}\right)^2$, то можно получить

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2\right) = \frac{1}{\left(2\pi\eta_2\right)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{n}{2\eta_2}\left[s_1^2 + \left(\overline{x}-\mu_1\right)^2\right]\right\}.$$

Определение 32

Последние две введённые величины называются оценками, соответственно, среднего значения и дисперсии (эмпирическими средним и дисперсией).

Рассмотрим три задачи:

1) η_2 известно, необходимо определить μ_1;

2) μ_1 известно, необходимо определить η_2;

3) μ_1 и η_2 неизвестны, необходимо их определить.

Если известно η_2 и $f_1(\mu_1)$ является априорной плотностью вероятности μ_1, то для условной плотности вероятности величины μ_1 при заданном η_2 и найденных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно получить следующее соотношение:

$$f_1(\mu_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_2) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2) f_1(\mu_1)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2) f_1(\mu_1) d\,\mu_1}.$$

С учётом гауссовости первого множителя в числителе получаем:

$$f_1(\mu_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_2) = \frac{f_1(\mu_1) \exp\left[-n(\mu_1 - \bar{x})^2 / 2\eta_2\right]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\mu_1) \exp\left[-n(\mu_1 - \bar{x})^2 / 2\eta_2\right] d\,\mu_1}.$$

Во второй и третьей задачах соответствующие соотношения имеют вид:

$$f_2(\eta_2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu_1) = \frac{f_2(\eta_2) f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta_2) f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2) d\,\mu_1},$$

$$f_3(\mu_1, \eta_2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f_3(\mu_1, \eta_2) f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_3(\mu_1, \eta_2) f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu_1, \eta_2) d\,\mu_1\, d\,\eta_2},$$

где $f_2(\eta_2)$ и $f_3(\mu_1, \eta_2)$ – дифференциальные функции распределения η_2 и пары (μ_1, η_2). С учётом гауссовости первого множителя в числителе получаем:

$$f_2(\eta_2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu_1) = \frac{\eta_2^{-n/2} f_2(\eta_2) \exp\left[-s^2 / 2\eta_2\right]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta_2) \exp\left[-s^2 / 2\eta_2\right] d\,\eta_2},$$

$$f_3(\mu_1, \eta_2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\eta_2^{-n/2}\, f_3(\mu_1, \eta_2) \exp\left\{-n\left[s_1^2 + (a - \bar{x})^2\right] / 2\eta_2\right\}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(\mu_1, \eta_2) \exp\left\{-n\left[s_1^2 + (a - \bar{x})^2\right] / 2\eta_2\right\} d\,\mu_1\, d\,\eta_2}.$$

В полученных соотношениях неизвестны априорные функции распределения $f_1(\mu_1)$, $f_2(\eta_2)$ и $f_3(\mu_1, \eta_2)$. В таком случае делаются некоторые допущения о форме неизвестных функций распределения и на их основе делаются соответствующие вычисления. Далее сделаем ряд общих допущений и на их основе получим предельные закономерности (при $n \to \infty$) для апостериорных вероятностей.

Пример 30

Если априорная плотность вероятности $f_1(\mu_1)$ имеет ограниченную первую производную и $f_1(\bar{x}) \neq 0$, то равномерна относительно α следующая апостериорная плотность вероятности:

$$f_1(\alpha \mid x_1, x_2, ..., x_n; \eta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\alpha^2/2\right)\left[1 + \left(1 + |\alpha|\right)\sqrt{\eta_2/n}\right],$$

где $\alpha = (\mu_1 - x)\sqrt{n/\eta_2}$.

<u>Пример 31</u>

В условиях предыдущего примера можно получить следующие соотношения для математических ожиданий:

$$M(\mu_1 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \eta_2) = \bar{x} + \eta_2/n,\ M\left((\mu_1 - \bar{x})^2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \eta_2\right) = \eta_2\left(1 + \sqrt{\eta_2/n}\right)/n.$$

<u>Пример 32</u>

Если априорная плотность вероятности $f_2(\eta_2)$ имеет ограниченную первую производную и $f_2(\bar{s}) \neq 0$, то равномерна относительно β следующая апостериорная плотность вероятности:

$$f_1(\beta \mid x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2}\left(1 + \frac{1 + |\beta|}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\beta = \sqrt{n}\left(\sqrt{\eta_2} - \bar{s}\right)/\bar{s}$, $\bar{s} = s/\sqrt{n}$.

<u>Пример 33</u>

В условиях предыдущего примера можно получить следующие соотношения для математических ожиданий:

$$M(\eta_2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1) = \bar{s} + 1/n,\ M\left((\eta_2 - \bar{x})^2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1\right) = \bar{s}^2\left(1 + 1/\sqrt{n}\right)/2n.$$

Из данного примера следует, что

$$\eta_2 \sim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_1)^2,$$

среднеквадратическая ошибка которого $U \approx \bar{s}^2/2n$.

<u>Пример 34</u>

Если априорная плотность вероятности $f_2(\mu_1, \eta_2)$ имеет ограниченные первые производные и $f_2(\bar{x}, \bar{s}) \neq 0$, то равномерна относительно β следующая апостериорная плотность вероятности:

$$f_1(\alpha, \beta \mid x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-\beta^2 - \alpha^2/2}\left[1 + \left(1 + |\alpha| + |\beta|\right)/\sqrt{n}\right].$$

<u>Пример 35</u>

В условиях предыдущего примера можно получить следующие соотношения для математических ожиданий:

$$M(\mu_1 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \eta_2) = \bar{x} + \eta_2/n,\ M\left((\mu_1 - \bar{x})^2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \eta_2\right) = \eta_2\left(1 + \sqrt{\eta_2/n}\right)/n,$$

$$M(\eta_2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1) = \bar{s} + 1/n,\ M\left((\eta_2 - \bar{x})^2 \mid x_1, x_2, ..., x_n; \mu_1\right) = \bar{s}^2\left(1 + 1/\sqrt{n}\right)/2n.$$

3.2. Эмпирическая функция распределения, гистограмма, полигон

Рассмотрим случайную величину X с неизвестным распределением. Проведём ряд опытов, в результате которого получим выборку значений случайной величины $\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$. В m_1 опытах получаем значения случайной величины X, меньшие x. В m_2 опытах получаем значения случайной величины X, большие x.

Определение 33

Отношение

$$\widetilde{F}(x) = m_1 / n$$

называется эмпирической функцией распределения (см. рис. 8).

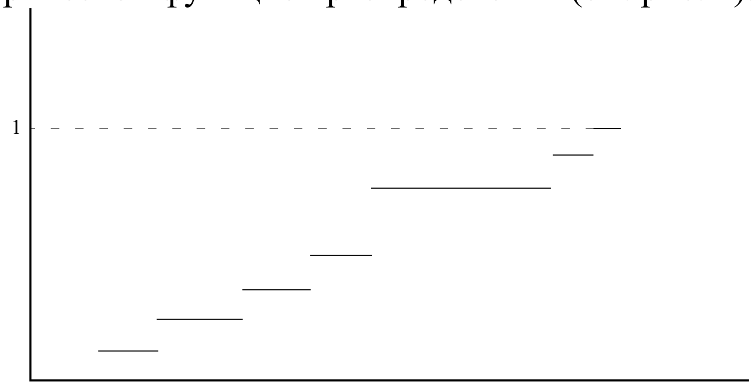


Рис. 8

Разобьём действительную ось на конечное число промежутков Δ_1, Δ_2, …, Δ_k. Далее определяем количество m_i выборочных значений, попадающих в интервал Δ_i ($1 \le i \le k$).

Определение 34

Полученные значения называются групповыми частотами.

Над Δ_i рисуется прямоугольник высотой m_i/n, характеризующий относительную частоту попадания в интервал Δ_i.

Определение 35

Значения, попавшие в интервал Δ_i, называются группированными.

Определение 36

Полученный график называется гистограммой, которая является оценкой плотности вероятности при конечном числе значений случайной величины n (см. рис. 9).

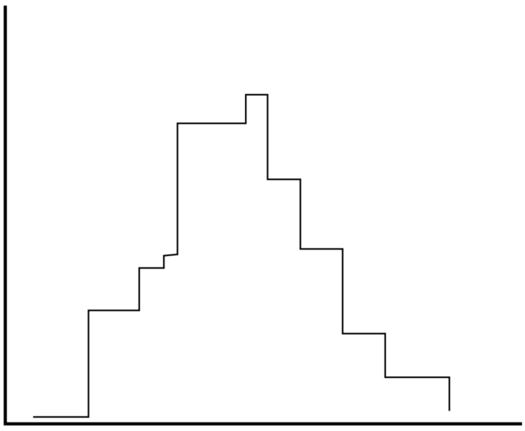


Рис. 9

Определение 37
Ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_1,m_1), (x_2,m_2), …, (x_k,m_k), называется полигоном.

3.3. Закон больших чисел

Под законом больших чисел понимается вся совокупность предложений, утверждающих с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, что наступит некоторое событие, каждое из которых оказывает на него лишь незначительное влияние.

3.4. Центральная предельная теорема

Рассмотрим случайную величину Y, равную сумме n взаимнонезависимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(Y=X_1+X_2+\ldots+X_n)$, имеющих произвольные, но одинаковые вероятностные распределения. Тогда при $n\to\infty$ плотность вероятности случайной величины Y стремится к гаусовому распределению.

3.5. Точечные и интервальные оценки неизвестных параметров распределения

Вернёмся к введённым ранее оценкам среднего значения и дисперсии:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,,\ s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 .$$

Определение 38
Подобные оценки называются точечными (статистическими), т.к. они определяются одним числом. Оценки, определяемые несколькими числами (например, границами интервала) называются интервальными.

Определение 39
Несмещённой называют статистическую оценку, если её математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром при любом объёме выборки. В противном случае оценка называется смещённой.

Определение 40
Эффективной называется статистическая оценка, которая при заданном объёме выборки имеет наименьшую дисперсию.

Определение 41
Состоятельной называется статистическая оценка, которая при $n\to\infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Для получения оценок может быть использован, например, метод моментов.

Определение 42
Последовательность случайных величин $X_1, X_2,\ldots, X_n$ сходится по вероятности к случайной величине X при $n\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ выполняется предел $P(|X_n - X|\geq\varepsilon)\to 0$.

Определение 43
Рассмотрим случайную X и последовательность её значений $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Если данная последовательность упорядочена по возрастанию, то она называется вариационным рядом.

Пример 36

Вариационный ряд значений 1, -3, 0, 5, 3 имеет следующий вид: -3, 0, 1, 3, 5.

Определение 44

Интервал, в который попадает значение случайной величины с заданной доверительной вероятностью (надёжностью), называется доверительным интервалом.

Рассмотрим многомерную случайную величину $X\equiv\{X_1,X_2,\ldots,X_\nu\}$ с ν измерениями. Рассмот-рим случайную выборку объёма n $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv(x_{11},x_{21},\ldots,x_{\nu 1},\ldots,x_{12},x_{22},\ldots,x_{\nu 2},\ldots,x_{1n},x_{2n},\ldots,x_{\nu n})$. В данном случае многомерная случайная величина характеризуется следующими характеристиками: выборочное среднее от x_i:

$$\bar{x}_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\text{ , }(i=1,2,\ldots,\nu);$$

выборочные дисперсии от x_i:

$$D_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}_i\right)\left(x_j-\bar{x}_j\right),\ (i,j=1,2,\ldots,\nu);$$

выборочные коэффициенты корреляции:

$$r_{ij}=D_{ij}\Big/\sqrt{D_{ii}D_{jj}}=r_{ji}\text{ , }(i,j=1,2,\ldots,\nu).$$

Точка $\bar{x}=\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_\nu\right)$ является центром выборочного распределения.

3.6. Регрессия

Определение 45

Если дано распределение системы двух случайных величин x_1 и x_2, то регрессией x_2 на x_1 называется любая функция $g_2(x_1)$, приближённо представляющая статистическую зависимость x_2 от x_1. При этом случайная величина x_2 представляется как сумма двух случайных величин

$$x_2=g_2(x_1)+h_2(x_1,x_2),$$

где $h_2(x_1,x_2)$ является поправочным членом (остатком).

Пример 37

$$g_2\left(x_1\right)=\begin{cases}\sum\limits_{x_2}x_2P_2\left(x_2/x_1\right), & \textit{для дискретного распределения}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}x_2f_2\left(x_2/x_1\right)d\,x_2, & \textit{для непрерывного распределения}\end{cases}$$

минимизирует средний квадрат отклонения

$$U=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x_2-g_2\left(x_1\right)\right]^2d\,x_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_2^2\left(x_1,x_2\right)d\,x_1$$

Часто достаточно аппроксимировать регрессию линейной функцией

$$g_2(x_1)=a+\beta_{21}(x_1-b),$$

где $\beta_{21} = G_{x_1 x_2} \sqrt{\eta_2 / \eta_1}$. Последнее уравнение описывает прямую регрессии величины x_2. β_{21} – коэффициент регрессии. Коэффициенты линейной регрессии минимизируют средний квадрат отклонения:

$$U = \eta_2^2 + \beta_{21}^2 \eta_1^2 - 2\beta_{21} G_{x_1 x_2} \sqrt{\eta_1 \eta_2} + \left[a - \left(\beta_{21} b + \beta_{21}\right)\right]^2.$$

Наименьший средний квадрат отклонения (остаточная дисперсия) равен $\eta_2 \left(1 - G_{x_1 x_2}^2\right)$.

Определение 46

Рассмотрим случайную величину X с неизвестным распределением $f_0(x)$, принадлежащим множеству распределений Ф. Любое предположение, выделяющее подсемейство распределений $\Phi_0 \in \Phi$, которому может принадлежать $f_0(x)$, называется гипотезой.

Определение 47

Дополнительное подмножество $K = \Phi_0 \backslash \Phi$ называется альтернативой к рассмотренной гипотезе.

Определение 48

Пусть необходимо определить некоторый параметр θ распределения $f_0(x)$. Гипотеза называется простой, если множество элементов гипотезы состоит из единственного элемента. В противном случае гипотеза называется сложной.

Если гипотеза подтверждается эмпирическими данными, то она принимается. Тогда множество подтверждённых значений называется областью принятия гипотезы. Если гипотеза не подтверждается эмпирическими данными, то она не принимается. Тогда множество подтверждённых значений называется критической областью. Применение процедуры принятия гипотезы связано с ошибками двух видов.

Определение 49

Отказ от гипотезы, когда она верна, называется ошибкой первого рода. Принятие от гипотезы, когда она неверна, называется ошибкой второго рода.

3.7. Статистическая проверка гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона (Неймана-Пирсона)

Для проверки простой гипотезы, которой соответствует распределение $f_0(x)$, против простой альтернативы K, которой соответствует распределение $f_1(x)$, критическая функция $\varphi(x)$ оптимального критерия Неймана-Пирсона при заданном уровне значимости α определяется условиями

$$\int_X \varphi(x) f_0(x) d\,x = \alpha, \; \varphi(x) = \begin{cases} 1, & f_1(x) \ge C_\alpha f_0(x) \\ 0, & f_1(x) < C_\alpha f_0(x) \end{cases}$$

Константа C_α в рамках критерия Неймана-Пирсона определяется величиной $T(x)=f_1(x)/f_0(x)$ с помощью следующего соотношения для вероятности того, что отношение плотностей вероятности непоявления и появления параметра θ превышает величину C_α равно α:

$$P_\theta(T(x) \ge C_\alpha) = \alpha.$$

Пример 38

Пусть $f(x,\mu_1,\eta_2)$ – нормальная плотность распределения со средним значением μ_1 и дисперсией η_2. Рассмотрим простую гипотезу: $\mu_1=\mu_{10}\geq 0$ при известном значении параметра η_2 против класса альтернатив $\mu_1>\mu_{10}$ с тем же значением параметра η_2. В простом случайном выборе $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – n-мерный вектор независимых одинаково распределённых случайных величин $x_1,x_2,\ldots,x_n$. В данном случае критерий Неймана-Пирсона определяется неравенством:

$$\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\mu_1)^2}{2\eta_2}\right]\geq l_\alpha \exp\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-\mu_{10})^2}{2\eta_2}\right].$$

После логарифмирования данное соотношение приводится к следующему виду:

$$(\mu_1-\mu_{10})\sum_{k=1}^{n}x_k\geq l_\alpha .$$

Для класса альтернатив $\mu_1>\mu_{10}$ критическая область задаётся соотношением:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\geq C_\alpha ,$$

где постоянная C_α определяется из условия:

$$P_{\mu\,10}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\geq C_\alpha\right)=\alpha .$$

Пример 39

Для простой гипотезы $\mu_1=\mu_{10}$ при неизвестном значении параметра η_2 против альтернативы $\mu_1>\mu_{10}$ критерий Неймана-Пирсона определяется критической областью:

$$\frac{\bar{x}-\mu_{10}}{\bar{s}}\geq C_\alpha ;\ \bar{x}=\sum_{k=1}^{n}x_k ;\ \bar{s}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2 .$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Решить задачи:

01.01 Из города A в город B ведёт 5 дорог, а из города B в город C 4 дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведёт из A в C?

01.02. Из города A в город B ведёт 5 дорог. Сколькими способами можно съездить из A в B и обратно, если путешествие туда и обратно совершается по разным дорогам?

01.03. На ферме 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу? Одну свинью? Двух животных – одну овцу и одну свинью?

01.04. В библиотеке 5 учебников геометрии, 7 – тригонометрии, 4 – алгебры. Сколько полных комплектов учебников можно составить? Сколькими способами комплектования? Все экземпляры считаются различными.

01.05. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из пяти?

01.06. Сколькими способами можно составит трёхцветный трёхкомпонентный флаг, если имеется материя пяти различных цветов? То же самое, если средняя полоса должна быть зелёной?

01.07. Флаг составлен из 13 горизонтальных полос красного, белого и жёлтого цвета, причём любые две соседние полосы должны быть разных цветов. Сколькими способами можно это осуществить?

01.08. Сколькими способами можно n одинаковых подарков раздать r детям, если нет никаких ограничений?

01.09. Сколькими способами можно n одинаковых подарков раздать r детям, если каждый ребёнок должен получить хотя бы один подарок?

01.10. Из колоды в $4n$ карт, которая содержит четыре различные масти, в каждой масти по n карт, $n\geq5$, занумерованными числами 1, 2, …, n, выбраны 5 карт. Расположить в порядке возрастания частоты появления, зависящей от n, пять карт одной масти.

01.11. Из колоды в $4n$ карт, которая содержит четыре различные масти, в каждой масти по n карт, $n\geq5$, занумерованными числами 1, 2, …, n, выбраны 5 карт. Расположить в порядке возрастания частоты появления, зависящей от n, пять последовательных карт одной масти.

01.12. Из колоды в $4n$ карт, которая содержит четыре различные масти, в каждой масти по n карт, $n\geq5$, занумерованными числами 1, 2, …, n, выбраны 5 карт. Расположить в порядке возрастания частоты появления, зависящей от n, пять последовательных карт любой масти.

01.13. Из колоды в $4n$ карт, которая содержит четыре различные масти, в каждой масти по n карт, $n\geq5$, занумерованными числами 1, 2, …, n, выбраны 5 карт. Расположить в порядке возрастания частоты появления, зависящей от n, две карты с одним номером и две с другим.

01.14. Необходимо послать 6 писем. Сколькими способами это можно сделать, если для доставки писем имеется 3 курьера?

01.15. Сколькими способами можно наклеить 5 различных марок на 5 различных конвертов?

01.16. Сколькими способами на 5 различных конвертов можно наклеить по одной марке, если имеется 7 различных видов марок?

01.17. В зрительном зале 120 мест. Сколькими способами могут занять места в нём 120 зрителей? 80 зрителей?

01.18. Сколькими способами можно расставить 7 различных книг на книжной полке?

01.19. В лифт сели 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на 4-х этажах, если на каждом этаже должен выйти хотя бы один человек?

01.20. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум карманам?

01.21. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по двум карманам так, чтобы оба кармана не были пусты?

01.22. Сколько способов разложить 10 различных монет по двум карманам?

01.23. Сколько способов разложить 10 различных монет по двум карманам так, чтобы оба кармана не были пусты?

01.24. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трём карманам?

01.25. Сколько способов разложить 10 одинаковых монет по трём карманам так, чтобы ни один из карманов не был бы пустым?

01.26. Сколько способов разложить 10 различных монет по трём карманам?

01.27. Сколько способов разложить 10 различных монет по трём карманам так, чтобы ни один из карманов не был бы пустым?

01.28. На карусели 4 одинаковых места для пассажиров. Сколько способов рассадки 4-х пассажиров для катания на карусели?

01.29. На карусели 4 одинаковых места для пассажиров. Сколько способов рассадки 4-х пассажиров для катания на карусели, если пассажир B должен кататься, имея перед собой пассажира A?

01.30. На собрании должны выступить 5 человек – A, B, C, D, E. Сколькими способами можно составить список выступающих, если B выступает непосредственно перед D?

01.31. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

01.32. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

01.33. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

01.34. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

01.35. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую - 5 и в третью - 12. Сколькими способами это можно сделать?

01.36. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

01.37. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

01.38. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

01.39. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

01.40. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

01.41. Сколько трехзначных чисел можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4?

01.42. Сколько будет костей в игре домино, если использовать, только четыре цифры 1, 2, 3, 4?

01.43. В чемпионате участвует 12 команд. Сколькими различными способами могут быть распределены три различные медали?

01.44. В семье 6 человек. За столом 6 стульев. В семье решили каждый вечер рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

01.45. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать капитана команды для математических соревнований и его заместителя?

2. Решить задачи:

02.01. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

02.02. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

02.03. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

02.04. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

02.05. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

02.06. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

02.07. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

02.08. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

02.09. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

02.10. В группе из 30 студентов на контрольной работе 6 студентов получили «5», 10 студентов - «4», 9 студентов - «3», остальные - «2». Найти вероятность того, что 3 студента, вызванные к доске, получили по контрольной работе «2».

02.11. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях монеты герб выпадет 5 раз?

02.12. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

02.13. В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

02.14. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

02.15. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

02.16. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?

02.17. В кабинете работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.

02.18. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

02.19. Дважды бросают симметричную монету. Найти вероятность того, что оба раза выпала одна сторона.

02.20. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

02.21. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет от 2 до 3 раз.

02.22. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 4 раза.

02.23. Монету подбрасывают 6 раз. Найти вероятность того, что гербы выпадут два раза и только подряд, а в остальные разы будут только решки.

02.24. В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад (не глядя) достаём один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?

02.25. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день - 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

02.26. В жеребьевке участвуют 5 немцев, 8 французов и 3 эстонца. Какова вероятность того, что первым будет выступать француз.

02.27. А если подбрасываем монету два раза? Какова вероятность того, что оба раза выпадет орел?

02.28. Бросаем игральную кость. Какова вероятность, что выпадет четное число?

02.29. Бросаем две игральные кости. Какова вероятность, что в сумме выпадет 10?

02.30. Брошен игральный кубик. Найти вероятность выпадения не менее 5 очков.

02.31. Одновременно бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет менее 5 очков.

02.32. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение числа очков делится на 3.

02.33. Бросают 3 игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 15 очков.

02.34. Бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало не более 4 очков, при условии, что сумма очков четная.

02.35. Игральный кубик брошен 4 раза. Найти вероятность того, что четное число очков выпадет ровно 3 раза.

02.36. Игральную кость бросают 8 раз. Найти вероятность того, что шестёрка появится хотя бы один раз.

02.37. В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

02.38. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

02.39. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них - ноль, а другая - нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

02.40. Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр - то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

02.41. В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что они выйдут на разных этажах.

02.42. В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что двое выйдут на одном этаже.

02.43. В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что все выйдут на одном этаже.

02.44. Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что на 9 монетах выпадет орёл, а на одной - решка.
02.45. Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что орёл выпадет на половине монет.
3. Решить задачи:
03.01. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi \\ -a \cdot \cos(x), & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & x > 3\pi/2 \end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной величины x в интервал $[\pi, 5\pi/4]$.
03.02. Случайная величина задана дифференциальной функцией распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi \\ -a \cdot \cos(x), & \pi \le x \le 3\pi/2 \\ 0, & x > 3\pi/2 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины x.
03.03. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a \cdot (x+1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти коэффициент a.
03.04. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a \cdot (x+1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения $F(x)$.
03.05. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a \cdot (x+1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание.
03.06. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a \cdot (x+1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти дисперсию.

03.07. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\cdot(x+1), & 1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Найти среднеквадратическое отклонение.
03.08. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\cdot(x+1), & 1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Найти вероятность $P(0<x<3)$.
03.09. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\cdot(x+1), & 1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Построить графики дифференциальной и интегральной функций распределения.
03.10. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\cdot(x-1), & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Имеет ли случайная величина x плотность вероятности $f(x)$? Если имеет, найти её.
03.11. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\cdot(x-1), & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Является ли случайная величина x непрерывной? Построить схематично графики $f(x)$ и $F(x)$.
03.12. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины x:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-a\cdot e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Найти значение параметра a. Построить график функции распределения $F(x)$.
03.13. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины x:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-a\cdot e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Найти вероятность $P(-1<x<1)$
03.14. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины x:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x<0\\1-a\cdot e^{-2x},\ x\geq 0\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и построить ее график.

03.15. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины имеет вид:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}2e^{-2t},\ t\geq 0\\0,\ t<0\end{cases}$$

Найти функцию распределения этой случайной величины.

03.16. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины имеет вид:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}2e^{-2t},\ t\geq 0\\0,\ t<0\end{cases}$$

Определить вероятность того, что прибор проработает не более года.

03.17. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины имеет вид:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}2e^{-2t},\ t\geq 0\\0,\ t<0\end{cases}$$

Определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года.

03.18. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону, т.е. плотность распределения этой случайной величины имеет вид:

$$f\left(t\right)=\begin{cases}2e^{-2t},\ t\geq 0\\0,\ t<0\end{cases}$$

Определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

03.19. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x\leq -1\\a\cdot\left(x+1\right)/2,\ 1<x<2\\1,\ x\geq 2\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятности $f(x)$.

03.20. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x\leq -1\\a\cdot\left(x+1\right)/2,\ 1<x<2\\1,\ x\geq 2\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины.

03.21. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ a\cdot(x+1)/2, & 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

Найти дисперсию случайной величины.

03.22. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ a\cdot(1+x/2), & -2<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$.

03.23. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ a\cdot(1+x/2), & -2<x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(x)$.

03.24. Случайная величина x задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a\cdot x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти коэффициент a.

03.25. Случайная величина x задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a\cdot x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения.

03.26. Случайная величина x задана интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a\cdot x^2/4, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти математическое ожидание.

03.27. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ a\cdot\cos(2x), & 3\pi/4<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$.

03.28. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ a\cdot\cos(2x), & 3\pi/4<x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Найти математическое ожидание x.

03.29. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ a\cdot\cos(2x), & 3\pi/4<x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Найти дисперсию x.

03.30. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ a\cdot\cos(2x), & 3\pi/4<x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

03.31. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/4\\ a\cdot\cos(2x), & 3\pi/4<x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$$

Найти вероятность $P(\pi/3<x<5\pi/6)$.

03.32. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ a\cdot(1+x), & -1<x\le 0\\ a\cdot(1-x), & 0<x\le 1\end{cases}$$

Найти математическое ожидание x.

03.33. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ a\cdot(1+x), & -1<x\le 0\\ a\cdot(1-x), & 0<x\le 1\end{cases}$$

Найти дисперсию x.

03.34. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ |x|>1 \\ a\cdot(1+x), \ -1<x\le 0 \\ a\cdot(1-x), \ 0<x\le 1 \end{cases}$$

Найти вероятность $P(x>0{,}5)$.

03.35. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot(x+1), \ -1\le x<0 \\ A\cdot(x-1)^2, \ 0\le x<2 \\ A\cdot(-x+3), \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Найти постоянную А.

03.36. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot(x+1), \ -1\le x<0 \\ A\cdot(x-1)^2, \ 0\le x<2 \\ A\cdot(-x+3), \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ случайной величины, построить её график и график плотности вероятности.

03.37. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot(x+1), \ -1\le x<0 \\ A\cdot(x-1)^2, \ 0\le x<2 \\ A\cdot(-x+3), \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины.

03.38. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot(x+1), \ -1\le x<0 \\ A\cdot(x-1)^2, \ 0\le x<2 \\ A\cdot(-x+3), \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Найти дисперсию случайной величины.

03.39. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} A\cdot(x+1), \ -1\le x<0 \\ A\cdot(x-1)^2, \ 0\le x<2 \\ A\cdot(-x+3), \ 2\le x\le 3 \end{cases}$$

Найти дисперсию случайной величины.

03.40. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\pi/6\\ a\cdot\sin(3x), & \pi/6<x\le\pi/3\\ 0, & x>\pi/3\end{cases}$$

Найти параметр a.

03.41. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\pi/6\\ a\cdot\sin(3x), & \pi/6<x\le\pi/3\\ 0, & x>\pi/3\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

03.42. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<\pi/6\\ a\cdot\sin(3x), & \pi/6<x\le\pi/3\\ 0, & x>\pi/3\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины x в интервал $0\le x\le\pi/6$.

03.43. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 1\le x\\ a\cdot(x-1)^2, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины x в интервал $0\le x\le 2{,}5$.

03.44. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 1\le x\\ a\cdot(x-1)^2, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины x в интервал $0\le x\le 2{,}5$.

03.45. Случайная величина x задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 1\le x\\ a\cdot(x-1)^2, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1972. - 184 с.
2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. – 831 с.
3. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1988. - 448 с.
4. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969. – 564 с.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Автор:
Евгений Леонидович **Панкратов**

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.